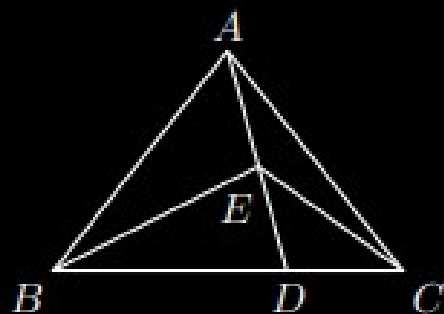
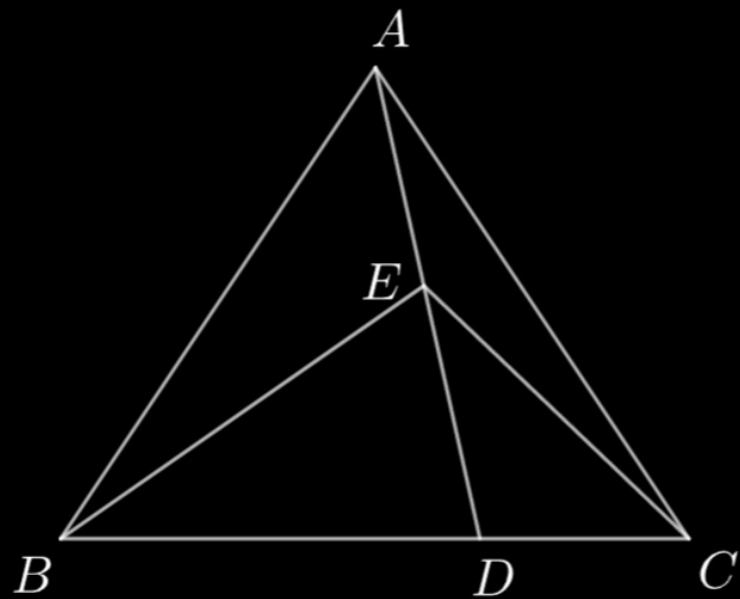
Doubt Yourself

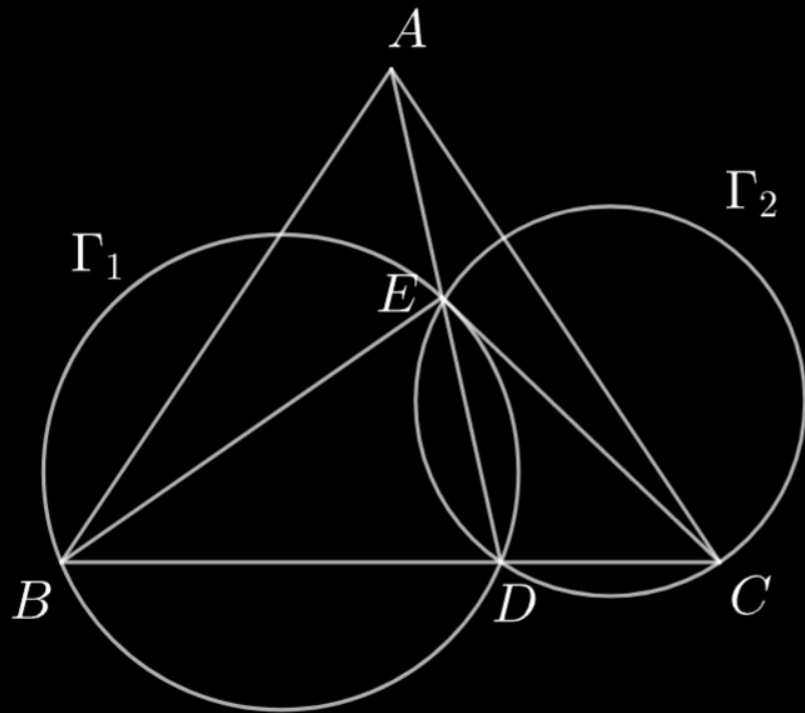
Olimpíadas Portuguesas de Matemática XXXIX
Dia 1 – Fase Final

André Pinheiro

Outubro de 2022

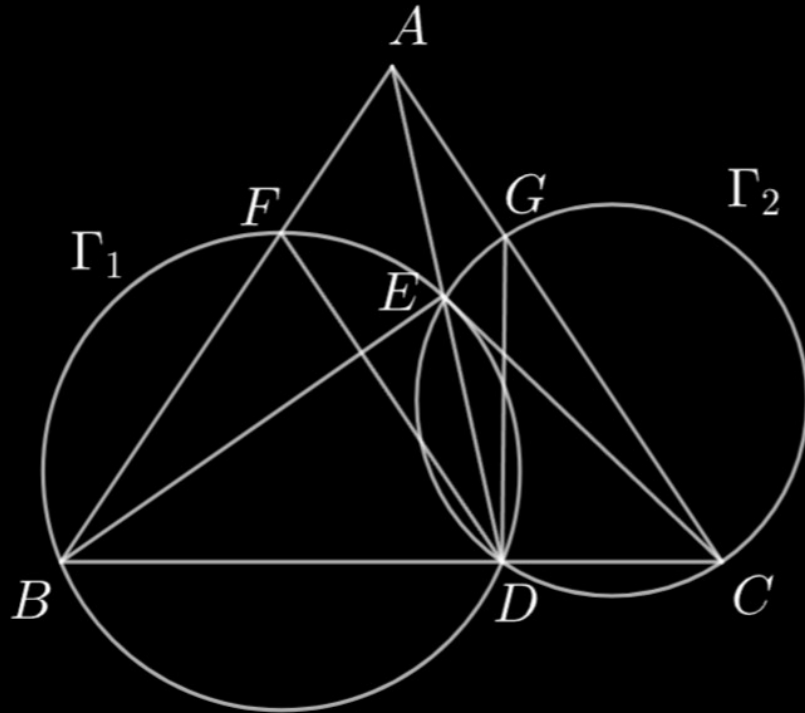
2. Seja $[ABC]$ um triângulo tal que $\overline{AB} = \overline{AC}$. Seja D um ponto em $[BC]$ e E um ponto em $[AD]$ tais que $B\hat{E}D = B\hat{A}C = 2 \times D\hat{E}C$. Mostra que $\overline{DB} = 2\overline{CD}$.

Solução

Temos então as seguintes informações:

1. $\overline{AB} = \overline{AC}$
2. $\angle BED = \angle BAC = 2\angle DEC$

Solução

Temos então as seguintes informações:

1. $\overline{AB} = \overline{AC}$;
2. $\angle BED = \angle BAC = 2\angle DEC = 2\alpha$.

Seja Γ_1 uma circunferência que passa por B, D e E e Γ_2 uma circunferência que passa por C, D e E.

Solução

Temos então as seguintes informações:
1. $\overline{AB} = \overline{AC}$
2. $\angle BED = \angle BAC = 2\angle DEC = 2\alpha$

Seja Γ_1 uma circunferência que passa por B, D e E e Γ_2 uma circunferência que passa por C, D e E.

Seja F a interceção de Γ_1 com AB em que $F \neq B$ e G a interceção de Γ_2 com AC em que $G \neq C$.

Pelo teorema do ângulo inscrito, $\angle BFD = \angle BED = 2\alpha$ e $\angle DGC = \angle DEC = \alpha$.

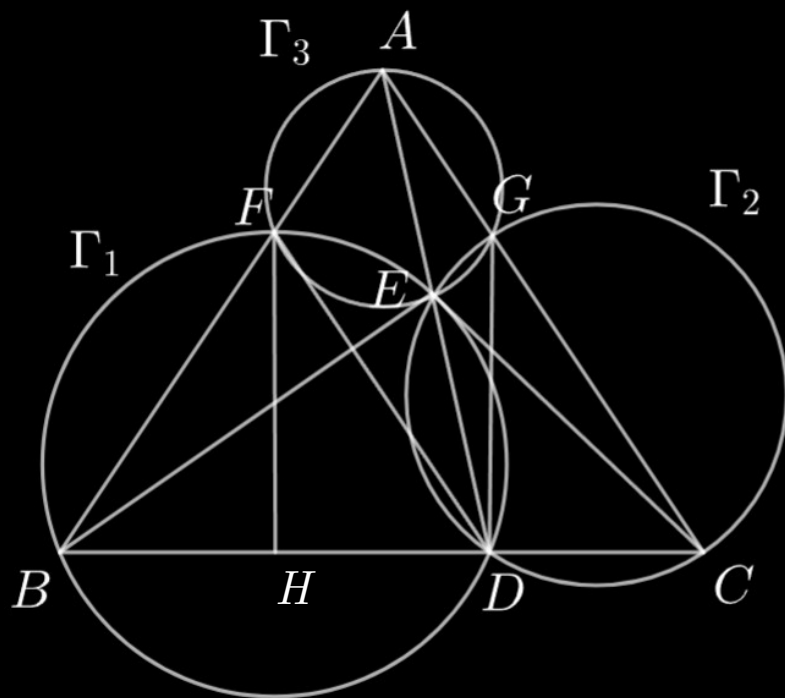
Solução

Seja H a projeção ortogonal de F em BD
Como $\overline{AB} = \overline{AC}$, então o triângulo [ABC] é isósceles, o que nos leva a $\angle ABC = \angle ACB = 90^{º}$ - $\angle ABC/2 = 90^{º} - \alpha$.

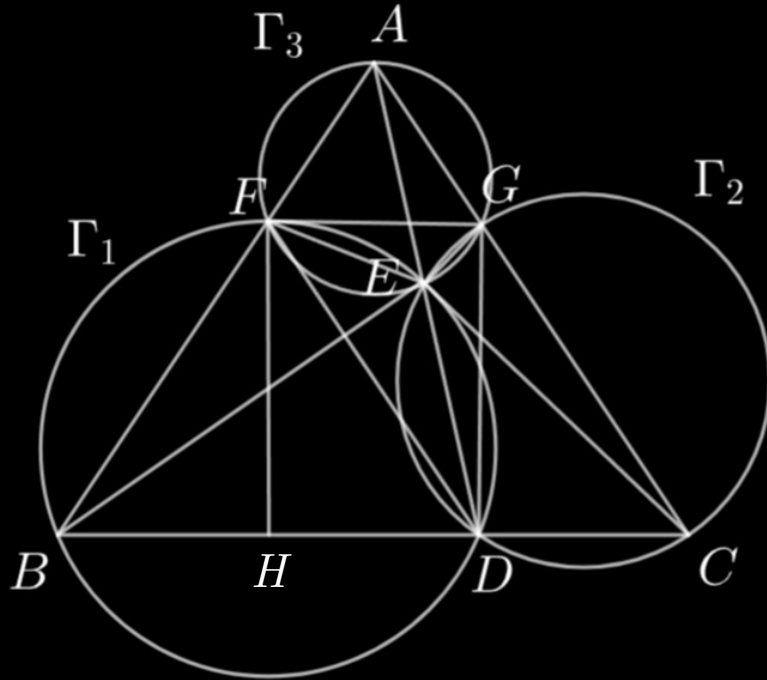
Ora, sendo $\angle DBF = 90^{º} - \alpha$ e $\angle BHF = 90^{º}$, então $\angle BFH = \alpha$, ou seja, os triângulos [BFH] e [FHD] são congruentes.

Além disso, como $\angle DGC = \alpha$ e $\angle DCG = 90^{º}$ - α, então $\angle CDG = 90^{º}$.

Agora, sabemos que os triângulos [BFH], [FHD] e [DCG] compartilham os mesmos ângulos, agora temos que provar que o triângulo [DCG] é congruente com [BHF] e [FHD]. Para isso, temos que provar que FG // BC.

Solução

Pelo teorema de Miquel, existe uma circunferência que passa por A, F, E e G, vamos denominar essa circunferência por Γ_3.

Ora, isso permite concluir que o quadrilátero [AGEF] é cíclico.

Solução

Pelo teorema de Miquel, existe uma circunferência que passa por A, F, E e G, vamos denominar essa circunferência por Γ_3.

Ora, isso permite concluir que o quadrilátero [AGEF] é cíclico.

Temos que $\angle BED + \angle BEF + \angle FEA = 180^o$.
Como [BFED] é cíclico, $\angle BEF = \angle BDF = 90^o - \alpha$.

Além disso, $\angle BED = 2\alpha$.

Sendo assim, $\angle FEA = 180^o - (\angle BED + \angle BEF) = 180^o - (2\alpha + 90^o - \alpha) = 90^o - \alpha$.

Como [AGEF] é cíclico, $\angle FGA = \angle FEA = 90^o - \alpha$

Solução

Portanto, FG // BC e assim concluímos que [BFH], [FHD] e [DCG] são congruentes.

Resulta assim que $2\overline{\mathrm{DC}} = \overline{\mathrm{BD}}$, tal como queríamos mostrar. □

Solução

Temos então as seguintes informações:
1. $\overline{AB} = \overline{AC}$;
2. $\angle BED = \angle BAC = 2\angle DEC = 2\alpha$.

Seja Γ_1 uma circunferência que passa por B, D e E e Γ_2 uma circunferência que passa por C, D e E.

Seja F a interceção de Γ_1 com AB em que $F \neq B$ e G a interceção de Γ_2 com AC em que $G \neq C$.

Pelo teorema do ângulo inscrito, $\angle BFD = \angle BED = 2\alpha$ e $\angle DGC = \angle DEC = \alpha$.

Seja H a projeção ortogonal de F em BD.
Como $\overline{AB} = \overline{AC}$, então o triângulo [ABC] é isósceles, o que nos leva a $\angle ABC = \angle ACB = 90º - \angle ABC/2 = 90º - \alpha$.

Ora, sendo $\angle DBF = 90º - \alpha$ e $\angle BHF = 90º$, então $\angle BFH = \alpha$, ou seja, os triângulos [BFH] e [FHD] são congruentes.

Além disso, como $\angle DGC = \alpha$ e $\angle DCG = 90º - \alpha$, então $\angle CDG = 90º$.

Agora, sabemos que os triângulos [BFH], [FHD] e [DCG] compartilham os mesmos ângulos, agora temos que provar que o triângulo [DCG] é congruente com [BHF] e [FHD]. Para isso, temos que provar que FG // BC.

Pelo teorema de Miquel, existe uma circunferência que passa por A, F, E e G, vamos denominar essa circunferência por Γ_3.

Ora, isso permite concluir que o quadrilátero [AGEF] é cíclico.

Solução

Temos que $\angle BED + \angle BEF + \angle FEA = 180^{\circ}$.
Como [BFED] é cíclico, $\angle BEF = \angle BDF = 90^{\circ} - \alpha$.

Além disso, $\angle BED = 2\alpha$.

Sendo assim, $\angle FEA = 180^{\circ} - (\angle BED + \angle BEF) =$
$180^{\circ} - (2\alpha + 90^{\circ} - \alpha) = 90^{\circ} - \alpha$.

Como [AGEF] é cíclico, $\angle FGA = \angle FEA = 90^{\circ} - \alpha$

Portanto, FG // BC e assim concluímos que [BFH], [FHD] e [DCG] são congruentes.

Resulta assim que $2\overline{DC} = \overline{BD}$, tal como queríamos mostrar. $\square$